Tema 3: Representación de Fourier

PROBLEMA 1: Determinar los coeficientes de la serie de Fourier (DTFS) para las siguientes señales periódicas:

a) $x[n] = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{12} n + \frac{3\pi}{8}\right)$

Sabemos que los coeficientes de la serie de una señal periódica (periodo N) y discreta en el tiempo son también periódicos de periodo N y discretos. Aplicando la ecuación de análisis:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

podríamos obtener los coeficientes. Sin embargo, en esta ocasión vamos a obtenerlos por inspección.

La frecuencia fundamental de la señal $x[n]$:

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{12} \Rightarrow N = \frac{2\pi}{\Omega} = \underline{\underline{24}}$$

Escribimos $x[n]$ como suma de exponenciales:

$$x[n] = 1 + \frac{e^{j\left(\frac{\pi}{12}n + \frac{3\pi}{8}\right)} - e^{-j\left(\frac{\pi}{12}n + \frac{3\pi}{8}\right)}}{2j} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2j} e^{j\frac{3\pi}{8}} \cdot e^{j\frac{\pi}{12}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{3\pi}{8}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{12}n}$$

Podemos escribir la ecuación de síntesis como:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=\langle 24\rangle} X[k] e^{jk\left(\frac{\pi}{12}\right)n} =$$

$$= \sum_{k=-12}^{11} X[k] e^{jk\frac{\pi}{12}n}$$

y observamos que:

$$1 = e^0 = X[k]\, e^{jk\frac{\pi}{12}n}\Big|_{k=0} \Rightarrow X[0] = 1$$

$$\frac{1}{2j} e^{j\frac{3\pi}{8}} \cdot e^{j\frac{\pi}{12}n} = X[k] \cdot e^{jk\frac{\pi}{12}n}\Big|_{k=1} \Rightarrow X[1] = \frac{1}{2j} e^{j\frac{3\pi}{8}}$$

$$-\frac{1}{2j} e^{-j\frac{3\pi}{8}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{12}n} = X[k]\, e^{jk\frac{\pi}{12}n}\Big|_{k=-1} \Rightarrow X[-1] = -\frac{1}{2j} e^{-j\frac{3\pi}{8}}$$

luego:

$$X[k] = \begin{cases} -\frac{1}{2j} e^{-j\frac{3\pi}{8}}, & k=-1 \\ 1, & k=0 \\ \frac{1}{2j} e^{j\frac{3\pi}{8}}, & k=1 \\ 0, & -12 \leq k \leq 11 \text{ y } k \neq 0, \pm 1 \end{cases}$$

(en un periodo)

Problema 1a.

$$X[-1] = -\frac{1}{2j}e^{-j\frac{3\pi}{8}} = \frac{j}{2}e^{-j\frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{2}e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}}$$

$$\begin{cases} |X[-1]| = \frac{1}{2} \\ arg\{X[-1]\} = \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

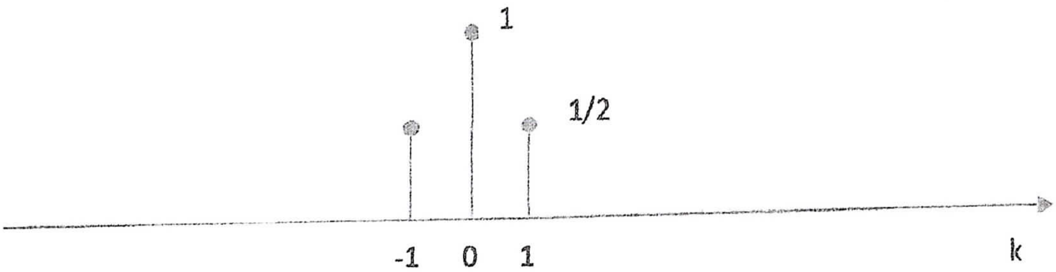
$$X[0] = 1$$

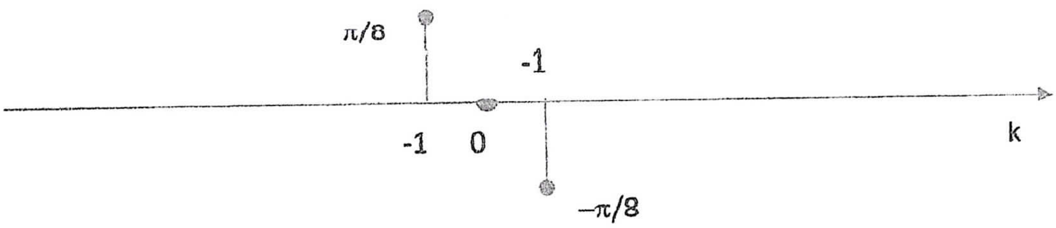
$$X[1] = \frac{1}{2j}e^{j\frac{3\pi}{8}} = \frac{-j}{2}e^{j\frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}$$

$$\begin{cases} |X[1]| = \frac{1}{2} \\ arg\{X[1]\} = -\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

$$X[K] = 0, \qquad -11 \leq k \leq 12 \; y \; k \neq 0, \pm 1$$

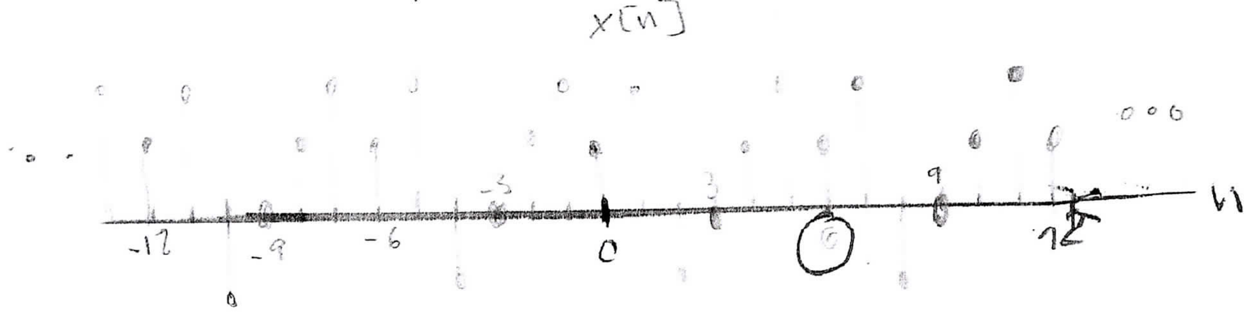
Sólo hemos dibujado $X[k]$ $para$ $k \neq 0, \pm 1$





$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + j = j$$
$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - j = -j$$

b) la señal representada en la siguiente figura:



Analizando la señal vemos que el periodo fundamental es $N = 6$ y por lo tanto $\Omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

A partir de la ecuación de análisis podemos obtener los coeficientes:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

donde el sumatorio es a todos los n de un periodo. Por comodidad:

$$-\frac{N}{2} \le n \le \frac{N}{2} - 1$$

$$X[k] = \frac{1}{6} \sum_{n=-3}^{2} x[n] \cdot e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{6} \sum_{n=-3}^{2} x[n] \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$$

$x[-3] = 0$;	$x[0] = 1$
$x[-2] = 1$;	$x[1] = 2$
$x[-1] = 2$;	$x[2] = -1$

Observando valores de la señal.

y podemos escribir los coeficientes:

$$X[k] = \frac{1}{6}\Big[\cancel{0 \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}(-3)}} + 1 \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}(-2)} + 2 \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}(-1)} + 1\,\overbrace{e^{-jk\frac{\pi}{3}(0)}}^{1} + 2 \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}(1)} - 1 \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}(2)}\Big] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[e^{jk\frac{2\pi}{3}} + 2\,e^{jk\frac{\pi}{3}} + 1 + 2\,e^{-jk\frac{\pi}{3}} - 1\,e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + 2\underbrace{\left(e^{jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{\pi}{3}}\right)}_{2\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)} + \underbrace{\left(e^{jk\frac{2\pi}{3}} - e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)}_{2j\,\mathrm{sen}\left(k\frac{2\pi}{3}\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + 4\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) + 2j\,\mathrm{sen}\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

siendo $X[k]$ periódicos $N=6$.

PROBLEMA 2. Determinar la señal periódica discreta $x[n]$ conocidos los coeficientes de su serie de Fourier:

a) $X[k] = \cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right)$, $N=8$

Al igual que en el problema 1(a), no vamos a aplicar la ecuación correspondiente de Fourier, sino que vamos a resolverlo por inspección comparando los coeficientes de Fourier dados en el problema con la expresión general de la ecuación de análisis e identificando términos:

En primer lugar a partir de la relación Euler expresamos $X[k]$ como: (recordad que $N=8 \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$)

$$\text{PROBLEMA: } X[k] = \cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{jk\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}e^{-jk\frac{\pi}{4}}\right) + \left(\frac{1}{2j}e^{j3k\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2j}e^{-j3k\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\text{DTFS-2: } X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{8}\sum_{n=\langle 8\rangle} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{4}n} =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{n=-3}^{4} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

Comparamos y vemos que:

Los términos del sumatorio de DTFS-2:

$n=-3: \frac{1}{8} x[-3] e^{-jk\frac{\pi}{4}(-3)} = \frac{1}{8} x[-3] e^{jk\frac{3\pi}{4}}$

$n=-2: \frac{1}{8} x[-2] e^{-jk\frac{\pi}{4}(-2)} = \frac{1}{8} x[-2] e^{jk\frac{\pi}{2}}$

$n=-1: \frac{1}{8} x[-1] e^{-jk\frac{\pi}{4}(-1)} = \frac{1}{8} x[-1] e^{jk\frac{\pi}{4}}$

$n=0: \frac{1}{8} x[0] e^{-jk\frac{\pi}{4}(0)} = \frac{1}{8} x[0]$

$n=1: \frac{1}{8} x[1] e^{-jk\frac{\pi}{4}(1)} = \frac{1}{8} x[1] e^{-jk\frac{\pi}{4}}$

$n=2: \frac{1}{8} x[2] e^{-jk\frac{\pi}{4}(2)} = \frac{1}{8} x[2] e^{-jk\frac{\pi}{2}}$

$n=3: \frac{1}{8} x[3] e^{-jk\frac{\pi}{4}(3)} = \frac{1}{8} x[3] e^{-jk\frac{3\pi}{4}}$

$n=4: \frac{1}{8} x[4] e^{-jk\frac{\pi}{4}(4)} = \frac{1}{8} x[4] e^{-jk\pi}$

Y si comparamos con los coeficientes dados problema:

$\frac{1}{2} \cancel{e^{jk\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{8} x[-1] \cancel{e^{jk\frac{\pi}{4}}} \Rightarrow x[-1] = 4$

$\frac{1}{2} e^{-jk\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8} x[1] e^{-jk\frac{\pi}{4}} \Rightarrow x[1] = 4$

$\frac{1}{2j} e^{jk\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{8} x[-3] e^{jk\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow x[-3] = \frac{4}{j} = -4j$

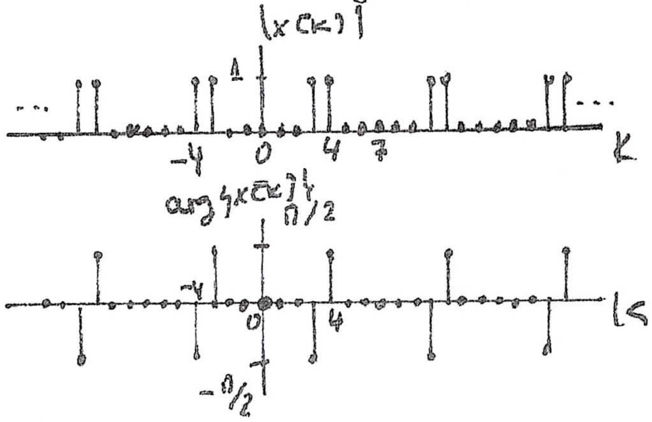
$-\frac{1}{2j} e^{-jk\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{8} x[3] e^{-jk\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow x[3] = -\frac{4}{j} = 4j$

es decir,

$$x[n] = \begin{cases} -4j, & n = -3 \\ 4j, & n = 3 \\ 4, & n = \pm 1 \\ 0, & n = 0, \pm 2, 4 \end{cases}$$

y $x[n]$ periódica de periodo $N = 8$.

b) $X[k]$ representado en la figura



Observando ~~las~~ el módulo y la fase de los coeficientes de la serie vemos que $N = 7$, luego $\Omega_0 = \frac{2\pi}{7}$.

Analizamos un periodo considerando muestras en el intervalo $n, k \in [-3, 3]$. Así

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=-3}^{3} X[k] e^{jk\frac{2\pi}{7}n}$$

De las figuras vemos que:

$X[-3] = 1 \cdot e^{-j(+\frac{\pi}{2})}$; $X[-1] = 0$; $X[1] = 0$; $X[3] = 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$X[-2] = 0$; $X[0] = 0$; $X[2] = 0$;

luego

$$x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j(-3)\frac{2\pi}{7}\cdot n} + e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j(3)\frac{2\pi}{7}\cdot n} =$$

$$= j\, e^{-\frac{6\pi}{7}n} - j\, e^{j\frac{6\pi}{7}n} = \frac{2j}{2j}\left(j e^{-\frac{6\pi}{7}n} - j e^{j\frac{6\pi}{7}n}\right) =$$

$$= \frac{2}{2j}\left(-e^{-\frac{6\pi}{7}n} + e^{j\frac{6\pi}{7}n}\right) = \frac{2\left(e^{j\frac{6\pi}{7}n} - e^{-\frac{6\pi}{7}n}\right)}{2j} =$$

$$= 2\sin\left(\frac{6\pi}{7}n\right), \quad n \in [-3, 3]$$

PROBLEMA 3. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes señales discretas en el tiempo:

a) $x[n] = \delta[6-3n]$

La transformada de Fourier de una señal discreta en el tiempo viene dada por (de nuevo mirar tablas, segunda fila, segunda columna):

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

Vemos que esta función (espectro de la señal $x[n]$) es una señal continua en frecuencia y periódica de periodo 2π.

Sustituimos la $x[n]$ por la función que la representa:

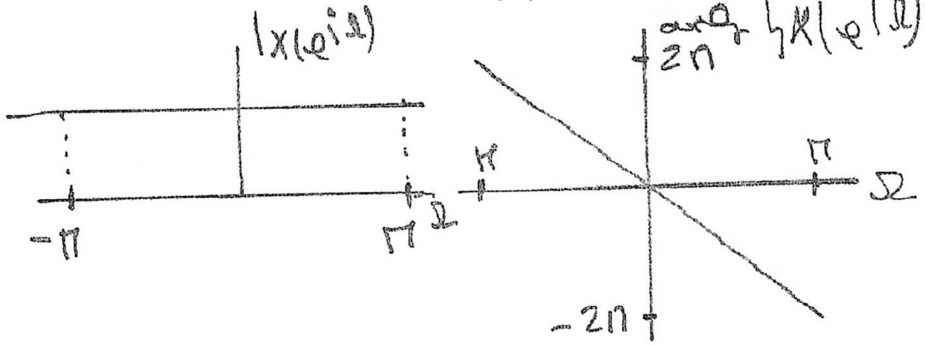
$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[6-3n]\, e^{-j\Omega n} = e^{-j2\Omega}$$

ya que $\delta[6-3n] = 1$ si $6-3n=0 \Rightarrow 3n=6 \Rightarrow n=2$

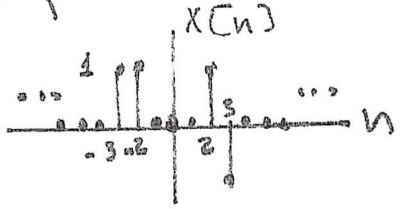
$$\delta[6-3n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n=2 \\ 0 & \text{si } n\neq 2. \end{cases}$$

Representamos la transformada de Fourier, que es de valor complejo:

$$X(e^{j\Omega}) = e^{-j2\Omega} \left\{ \begin{array}{l} |X(e^{j\Omega})| = 1 \\ \arg\{X(e^{j\Omega})\} = -2\Omega \end{array} \right. \text{, periódica } 2\pi$$



b) La señal $x[n]$ representada en la figura:



Al igual que en el apartado anterior:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

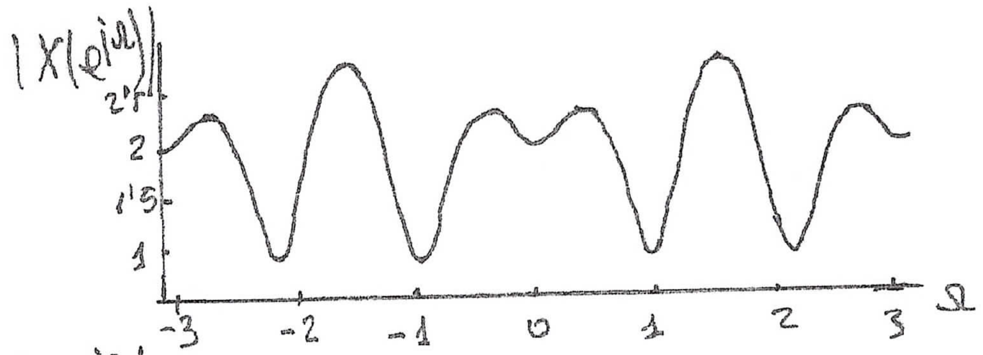
Analizando la señal vemos que solo hay cuatro muestras distintas de cero, luego:

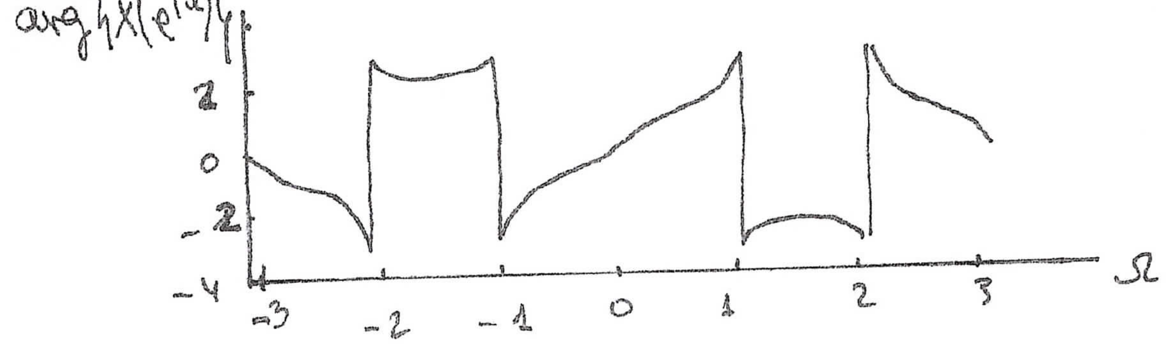
$$X(e^{j\Omega}) = 1 \cdot e^{-j\Omega(-3)} + 1 \cdot e^{-j\Omega(-2)} + 1 \cdot e^{-j\Omega(2)} - 1 \cdot e^{-j\Omega(3)} =$$

$$= \underbrace{e^{j3\Omega} - e^{-j3\Omega}}_{2j\,\text{sen}(3\Omega)} + e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega} =$$

$$= 2\cos(2\Omega) + 2j\,\text{sen}(3\Omega)$$

Si os animáis a representar el módulo y la fase utilizando matlab os quedaría:





Problema 4. Obtener la señal $x[n]$ a partir de su transformada de Fourier:

a) $\begin{cases} |X(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{2} < |\Omega| < \pi \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \\ \arg\{X(e^{j\Omega})\} = -4\Omega \end{cases}$

La transformada inversa de Fourier ~~es~~ una señal discreta en el tiempo y aperiódica:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

luego:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{-j4\Omega} \cdot e^{j\Omega n}\, d\Omega + \int_{+\pi/2}^{\pi} e^{-j4\Omega} \cdot e^{j\Omega n}\, d\Omega\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{j(n-4)\Omega}\, d\Omega + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{j(n-4)\Omega}\, d\Omega\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi j(n-4)}\left[e^{j(n-4)\Omega}\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + e^{j(n-4)\Omega}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi j(n-4)}\left[e^{-j(n-4)\frac{\pi}{2}} - e^{-j(n-4)\pi} + e^{j(n-4)\pi} - e^{j(n-4)\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi j(n-4)}\left(e^{-j(n-4)\frac{\pi}{2}} - e^{j(n-4)\frac{\pi}{2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi j(n-4)}\left(-e^{-j(n-4)\pi} + e^{j(n-4)\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi(n-4)}\left(\frac{e^{j(n-4)\frac{\pi}{2}} - e^{-j(n-4)\frac{\pi}{2}}}{2j} \right) \to \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(n-4)\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi(n-4)}\left(\frac{e^{j(n-4)\pi} - e^{-j(n-4)\frac{\pi}{2}}}{2j} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(n-4)}\left(\sin(\pi(n-4)) - \sin\left(\frac{\pi}{2}(n-4)\right)\right) =$$

$$= \operatorname{sinc}(n-4) - \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n-4}{2}\right)$$

Recordad que $\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

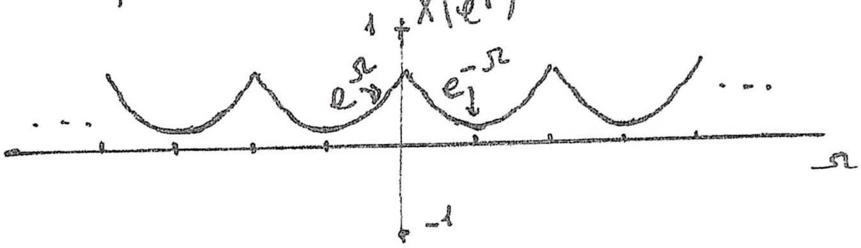
Luego para $n=4$, $x[n] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Finalmente podemos escribir:

$$x[n] = \operatorname{sinc}(n-4) - \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n-4}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-4)}\left[\sin(\pi(n-4)) - \sin\left(\frac{\pi}{2}(n-4)\right)\right], & n \neq 4 \\ \frac{1}{2}, & n = 4 \end{cases}$$

b) $X(e^{j\Omega})$ representado en la siguiente figura



Sabemos que $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$, es decir,

integramos en un periodo de la señal. que sabéis es periódica de periodo 2π
↳ en frecuencia

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} e^{\Omega}\cdot e^{j\Omega n}\, d\Omega + \int_{0}^{\pi} e^{-\Omega}\cdot e^{j\Omega n}\, d\Omega\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} e^{(jn+1)\Omega}\, d\Omega + \int_{0}^{\pi} e^{(jn-1)\Omega}\, d\Omega\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{jn+1} e^{(jn+1)\Omega}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{jn-1} e^{(jn-1)\Omega}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-e^{-(jn+1)\pi}}{jn+1} + \frac{e^{(jn-1)\pi}-1}{jn-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{(1-e^{-jn\pi}\cdot e^{-\pi})(jn-1)+(e^{jn\pi}\cdot e^{-\pi}-1)(jn+1)}{(jn)^2-1^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\,\frac{jn-1-jne^{-jn\pi}\cdot e^{-\pi}+e^{-jn\pi}\cdot e^{-\pi}+jne^{jn\pi}\cdot e^{-\pi}+e^{jn\pi}\cdot e^{-\pi}-jn-1}{n^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\,\frac{-2+jn\,e^{-\pi}(e^{jn\pi}-e^{-jn\pi})+e^{-\pi}(e^{jn\pi}+e^{-jn\pi})}{n^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-2}{n^2+1} + \frac{jn\,e^{-\pi}(e^{jn\pi}-e^{-jn\pi})}{n^2+1} + \frac{e^{-\pi}(e^{jn\pi}+e^{-jn\pi})}{n^2+1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-2}{n^2+1} + \cancel{\frac{2j\cdot j\,e^{-\pi}\cdot\sin(n\pi)}{n^2+1}} + \frac{2e^{-\pi}\cos(n\pi)}{n^2+1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-2}{n^2+1} + \frac{2e^{-\pi}\cdot\cos(n\pi)}{n^2+1}\right] = \frac{1-e^{-\pi}\cos(n\pi)}{\pi(n^2+1)} =$$

$$= \frac{1-e^{-\pi}(-1)^n}{\pi(n^2+1)}$$

PROBLEMA 5. Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos señales discretas en el tiempo, reales y periódicas de periodo N. Sean $X[k]$ e $Y[k]$ los coeficientes de sus respectivas series de Fourier. Para la secuencia compleja y periódica $z[n] = x[n] + j\,y[n]$, obtener las expresiones que permitan calcular $X[k]$ e $Y[k]$ a partir de los coeficientes $Z[k]$ de la secuencia $z[n]$.

Como $x[n]$ e $y[n]$ son señales reales, sus coeficientes $X[k]$ e $Y[k]$ tienen simetría conjugada (ver propiedades de las series):

$$X[k] = X^*[-k] \quad \text{e} \quad Y[k] = Y^*[-k]$$

Si $z[n] = x[n] + j\,y[n]$ por la propiedad de linealidad sus coeficientes:

$$Z[k] = X[k] + j\,Y[k] \qquad (1)$$

Operamos sobre $Z[k]$:

$$Z[-k] = X[-k] + jY[-k]$$

y calculamos el complejo conjugado:

$$Z^*[-k] = X^*[-k] - jY^*[-k]$$

y teniendo en cuenta la simetría conjugada:

$$Z^*[-k] = X[k] - jY[k] \qquad (2)$$

Si sumamos (1) y (2):

$$Z[k] + Z^*[-k] = 2X[k] \Rightarrow \boxed{X[k] = \frac{Z[k] + Z^*[-k]}{2}}$$

Si restamos:

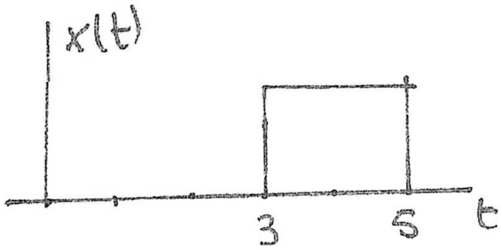
$$Z[k] - Z^*[-k] = 2jY[k] \Rightarrow \boxed{Y[k] = \frac{Z[k] - Z^*[-k]}{2j}}$$

PROBLEMA 6. Considerar un sistema LTI caracterizado por su respuesta al impulso $h(t) = e^{-3t}u(t)$. Si la entrada al sistema viene dada por la expresión $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$

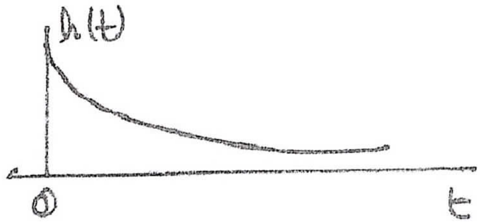
a) Calcular $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

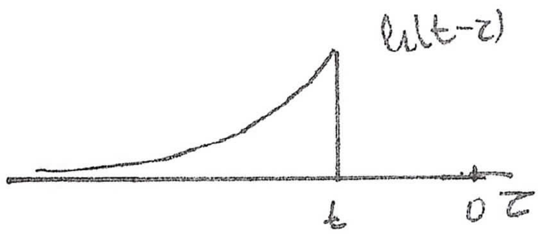
$$x(t) = \begin{cases} 1, & 3 < t < 5 \\ 0, & \text{otro } t \end{cases}$$

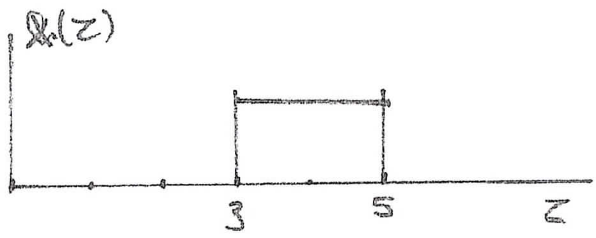


$$h(t) = \begin{cases} e^{-3t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$x(\tau) = \begin{cases} 1, & 3 < \tau < 5 \\ 0, & \text{otro } \tau \end{cases} \quad ; \quad h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-3(t-\tau)}, & \tau < t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$





$t < 3 \qquad y(t) = 0$

$3 < t < 5 \qquad y(t) = \int_3^t 1 \cdot e^{-3(t-\tau)} d\tau = e^{-3t} \int_3^t e^{3\tau} d\tau =$

$$= e^{-3t} \frac{e^{3\tau}}{3} \Big|_3^t = e^{-3t} \frac{e^{3t} - e^{9}}{3} =$$

$$= \frac{1 - e^{-3(t-3)}}{3}$$

$t > 5 \qquad y(t) = \int_3^5 1 \cdot e^{-3(t-\tau)} d\tau = e^{-3t} \frac{e^{15} - e^{9}}{3} =$

$$= \frac{e^{-3t+15} - e^{-3t+9}}{3} = \frac{e^{-3(t-5)} - e^{-3(t-3)}}{3} =$$

$$= \frac{(1 - e^{-6})\, e^{-3(t-5)}}{3}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ \dfrac{1 - e^{-3(t-3)}}{3}, & 3 < t < 5 \\ \dfrac{(1 - e^{-6})\, e^{-3(t-5)}}{3}, & t > 5 \end{cases}$$

b) Calcular $g(t) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[u(t-3) - u(t-5)\right] =$$

$$= \frac{du(t-3)}{dt} - \frac{du(t-5)}{dt} =$$

$$= \delta(t-3) - \delta(t-5)$$

Calculamos $g(t)$:

$$g(t) = \left[\delta(t-3) - \delta(t-5)\right] * h(t) = \text{(prop. distributiva)}$$

$$= \delta(t-3) * h(t) - \delta(t-5) * h(t) =$$

$$= h(t-3) - h(t-5) =$$

$$= \underline{e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5)}$$

c) Obtener la relación entre $g(t)$ e $y(t)$:

En el dominio del tiempo no es sencillo encontrar la relación por ello vamos a intentarlo en la frecuencia:

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) \xleftrightarrow{FT} G(j\omega) = j\omega X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

convol. producto

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

luego, comparando, se observa que:

$$Q(j\omega) = j\omega \cdot Y(j\omega)$$

y la transformada inversa:

$$q(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$